

# КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 25.11.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

## Решения

1. На клетчатой доске  $28 \times 28$  все 28 клеток диагонали, идущей из левого верхнего угла доски в правый нижний, покрашены в чёрный цвет. Хромая ладья за один ход переходит из клетки в соседнюю с ней по стороне. Хромая ладья обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно один раз (в частности, она не возвращалась в начальную клетку). Докажите, что в какой-то момент ладья сошла с чёрной клетки, а следующим ходом пришла на чёрную.

Швейцария, 2024, второй тур (оригинально — Турнир Городов)

**Решение.** Предположим противное. Отметим клетки, на которых была ладья до и после клетки на синей диагонали. Для каждой клетки этой диагонали, кроме может быть тех, на которых ладья начала и закончила свой путь, это две клетки. Итого, мы отметим не менее  $2 \cdot 26 + 2 = 54$  клеток. По нашему предположению все эти клетки различные. С другой стороны, клеток, соседних с клетками синей диагонали, в точности 54. Значит, мы отметили их все, притом ладья должна была начать и закончить свой путь на синей диагонали.

Дополним теперь нашу раскраску до шахматной. Осталось заметить, что в начальный и конечный момент времени ладья должна быть на клетках разного цвета, т.к. всего сделала  $28^2 - 1$  ходов, т.е. нечётное количество, а каждый ход она меняла цвет клетки на которой стояла. Полученное противоречие завершает доказательство.

2. Даны натуральные числа  $b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_m$ , а также натуральное  $k > 2$ . Обозначим

$$P = \prod_{i=1}^n (b_i + k - 1) \prod_{j=1}^m (c_j + 1), \quad Q = \prod_{i=1}^n (b_i + k) \prod_{j=1}^m c_j, \quad R = \prod_{i=1}^n (b_i + 1) \prod_{j=1}^m (c_j + k - 1).$$

Докажите, что если  $P < Q$ , то  $P > R$ . Как обычно, через  $\prod_{s=1}^t a_s$  обозначается произведение  $a_1 a_2 \dots a_t$ .

И. Богданов, MathOverflow

**Решение.** Утверждение задачи непосредственно следует из неравенства  $P^{k-1} > Q^{k-2} R$ , которое мы и докажем. Из неравенства о средних (для чисел, среди которых есть различные) вытекает, что

$$(b_i + k)^{k-2} (b_i + 1) < \left( \frac{(k-2)(b_i + k) + (b_i + 1)}{k-1} \right)^{k-1} = (b_i + k - 1)^{k-1}$$

при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , и

$$c_j^{k-2} (c_j + k - 1) < \left( \frac{(k-2)c_j + (c_j + k - 1)}{k-1} \right)^{k-1} = (c_j + 1)^{k-1}$$

при всех  $j = 1, 2, \dots, m$ . Перемножая все эти  $n + m$  неравенств, получаем требуемое.

**Замечание.** Для натуральных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , верно, что

$$\prod_{i=1}^n (x_i + 1)(x_i - 1) \prod_{j=1}^m (y_j - 1)(y_j + 1) < \prod_{i=1}^n x_i \cdot x_i \prod_{j=1}^m y_j \cdot y_j.$$

Тогда

$$\prod_{i=1}^n (x_i + 1) \prod_{j=1}^m (y_j - 1) > \prod_{i=1}^n x_i \prod_{j=1}^m y_j \implies \prod_{i=1}^n (x_i - 1) \prod_{j=1}^m (y_j + 1) < \prod_{i=1}^n x_i \prod_{j=1}^m y_j.$$

Применяя цепочку таких неравенств, можно получить решение задачи.

3. В окружности, описанной около неравнобедренного остроугольного треугольника  $ABC$ , взят диаметр  $UV$ , проходящий через ортоцентр  $H$  этого треугольника. Пусть  $AD$  — высота этого

треугольника, а  $S$  — ортоцентр треугольника  $DUV$ . Докажите, что середина отрезка  $AS$  лежит на прямой  $BC$ .

И. Замоторин

**Решение.** Пусть  $UU_1$  и  $DD_1$  — высоты треугольника  $UVD$ , а  $A'$  — точка, симметричная  $A$  относительно  $BC$ . Как известно, точки  $A', B, C$  и  $H$  лежат на одной окружности, откуда  $A'D \cdot DH = BD \cdot DC$ . Поскольку  $\angle UU_1V = 90^\circ$ , точка  $U_1$  лежит на окружности  $(ABC)$ , так что  $BD \cdot DC = VD \cdot DU_1$ . Кроме того, поскольку  $\angle SD_1V = \angle VU_1S = 90^\circ$ , точки  $U_1$  и  $D_1$  лежат на окружности с диаметром  $VS$ , поэтому  $VD \cdot DU_1 = SD \cdot DD_1$ . Итак, мы получили, что  $SD \cdot DD_1 = A'D \cdot DH$ . Отсюда точки  $S, D_1, A'$  и  $H$  лежат на одной окружности, поэтому  $\angle SA'H = \angle SD_1H = 90^\circ$ , а значит,  $SA' \parallel BC$ . Так как  $D$  — середина  $AA'$ , получаем, что  $BC$  — средняя линия в треугольнике  $SAA'$ , откуда и следует требуемое.

4. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$  — перестановка чисел  $1, 2, \dots, 2n+1$ . Обязательно ли можно окрасить все числа  $1, 2, \dots, 2n+1$  в красный и синий цвета так, чтобы при любом  $i = 1, 2, \dots, 2n+1$  числа  $i, i+1, i+2$  не были все красными, и числа  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}$  не были все синими? Числа и индексы берутся по модулю  $2n+1$ .

MathOverflow

**Ответ:** Обязательно.

**Решение.** Далее всегда будем отождествлять числа  $i$  и  $i+2n+1$ , а также  $a_i$  и  $a_{i+2n+1}$  для  $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ . Построим граф, вершинами которого будут наши числа. Также, при необходимости сдвинув перестановку по циклу, можно считать, что  $a_1 = 1$ .

Будем соединять белым ребром все пары чисел вида  $2i, 2i+1$ , а черным ребром все пары чисел вида  $a_{2i}, a_{2i+1}$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . В построенном графе вершина 1 является изолированной, а из каждой из остальных вершин выходит одно белое и одно черное ребро. Поэтому, если выкинуть вершину 1, оставшийся граф будет представлять из себя несколько циклов, в каждом из которых цвета ребер чередуются.

В частности, длина каждого цикла четна, и мы можем покрасить вершины в каждом из них, чередуя красный и синий цвет. Сделаем это так, чтобы число 2 стало синим. Теперь вернем число 1 и покрасим его в красный цвет. Заметим, что в каждой тройке вида  $i, i+1, i+2$ , кроме  $2n+1, 1, 2$ , есть две вершины, соединенные ребром. Поэтому в каждой из них есть синее число. Также число 2 синее, поэтому для всех таких троек условие выполнено. Также в любой тройке вида  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}$  есть либо две вершины, соединенные ребром, либо 1. Поэтому во всех таких тройках есть красное число.

5. Верно ли, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде  $\pm t^{17} \pm p$ , где  $t$  — натуральное число, а  $p$  — простое число?

N. MacKinnon, АММ, модификация

**Ответ:** верно.

**Решение.** Попробуем в качестве числа взять  $n^{17}$  для натурального числа  $n$  (позднее мы добавим на  $n$  некоторое условие).

Тогда  $n^{17}$  не может равняться  $-m^{17} \pm p$ , т.к.  $|n^{17} + m^{17}|$  делится на  $n + m < n^{17} + m^{17}$ , т.е. не может быть простым. Если  $|n - m| \geq 2$ , то  $n^{17}$  не может равняться  $m^{17} \pm p$ , т.к.  $|n^{17} - m^{17}|$  делится на  $|n - m| < |n^{17} - m^{17}|$  и тоже не может быть простым.

Осталось разобраться со случаями  $m = n \pm 1$ , т.е. выбрать такие  $n$ , чтобы ни  $(n+1)^{17} - n^{17}$ , ни  $n^{17} - (n-1)^{17}$  не могли быть простыми числами. Возьмём какой-нибудь простой делитель  $p$  числа  $2^{17} - 1$  (на самом деле это число простое) и какой-нибудь простой делитель  $q$  числа  $p^{17} - (p-1)^{17}$ . Заметим сразу, что  $p$  и  $q$  — различные простые числа, т.к.  $p^{17} - (p-1)^{17}$  не делится на  $p$ . Теперь в качестве  $n$  будем выбирать числа, удовлетворяющие сравнениям  $n \equiv 1 \pmod{p}$  и  $n \equiv p \pmod{q}$ , большие  $p$ . Таких бесконечно много по Китайской Теореме об Остатках. Тогда  $(n+1)^{17} - n^{17} \equiv 2^{17} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  и  $n^{17} - (n-1)^{17} \equiv p^{17} - (p-1)^{17} \equiv 0 \pmod{q}$ , т.е. и эти два числа не будут простыми.

6. Дан описанный четырёхугольник  $ABCD$ . Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , а прямые  $AD$  и  $BC$  — в точке  $F$ . Внешние биссектрисы углов  $A$  и  $C$  и прямая  $EF$  образуют треугольник  $\Delta_1$ . Внешние биссектрисы углов  $B$  и  $D$  и прямая  $EF$  образуют треугольник  $\Delta_2$ . Докажите,

что описанные окружности треугольников  $\triangle_1$  и  $\triangle_2$  касаются.

К.Бельский

**Решение.** Не умаляя общности, лучи  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , лучи  $AD$  и  $BC$  в точке  $F$ . Пусть  $PQRS$  — четырехугольник, образованный внешними биссектрисами четырехугольника  $ABCD$  ( $P$  на внешних биссектрисах углов  $A$  и  $B$  и далее по циклу). Обозначим за  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$  и  $2\delta$  — углы четырехугольника  $ABCD$ . Тогда заметим, что  $PQRS$  — вписанный четырехугольник:  $\angle PSR = 180^\circ - \angle SAD - \angle SDA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \delta) = \alpha + \delta$  аналогично  $\angle PQR = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha - \delta$ . Пусть  $X$  — точка пересечения прямых  $PQ$  и  $RS$ , а  $Y$  — точка пересечения прямых  $PS$  и  $QR$ . Рассмотрим точку  $M$  — точку Микеля четырехугольника  $PQRS$ . Тогда она лежит на прямой, соединяющей точки пересечения противоположных сторон четырехугольника  $PQRS$ , то есть на прямой  $XY$ .

Пусть  $K$  и  $L$  — точки пересечения внешних биссектрис углов  $B$  и  $D$  с прямой  $EF$  соответственно. Рассмотрим поворотную гомотегию  $H_1$  с центром в  $M$ , переводящую  $P$  в  $S$ , а  $Q$  в  $R$ . Нам надо доказать, что точка  $M$  лежит на описанной окружности треугольника  $\triangle_2 = KXL$ . Это равносильно тому, что  $H_1$  переводит  $K$  в  $L$ . Пусть  $I$  — центр вписанной окружности четырехугольника  $ABCD$ , тогда точки  $E, S, I$  и  $Q$  лежат на одной прямой — биссектрисе угла  $\angle BEC$ , и аналогично точки  $P, I, R$  и  $F$  лежат на одной прямой. Тогда  $I$  — точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника  $PQRS$ , а значит треугольники  $PIQ$  и  $SIR$  подобны, а  $B$  и  $D$  в них — основания высот, то есть соответствующие элементы. Тогда  $PB : BQ = SD : DR$ , то есть  $H_1$  переводит  $B$  в  $D$ . Если мы проверим, что  $(P, Q; B, K) = -1$  и  $(S, R; D, L) = -1$ , то получим искомое, ведь при поворотной гомотегии гармоническое дополнение тройки точек переходит в гармоническое дополнение образов.

Достаточно доказать, что  $(P, Q; B, K) = -1$ , второе доказывается аналогично. Рассмотрим проекцию с центром в  $E$  с прямой  $PQ$  на прямую  $PR$ . Тогда точки  $P, B, Q$  и  $K$  перейдут в  $P, I, B_1$  и  $F$  соответственно, где  $B_1$  — основание биссектрисы угла  $F$  в треугольнике  $ABF$ . Тогда  $(P, Q; B, K) = (P, I; B_1, F) = -1$ , ведь  $I$  и  $P$  — это центры вписанной и  $F$ -внеписанной окружностей треугольника  $ABC$ .

Аналогично доказывается, что  $M$  лежит на описанной окружности  $\triangle_1$ .

Теперь мы знаем, что  $M$  — точка пересечения наших окружностей. Покажем, что это точка касания. Пусть  $PS$  и  $QR$  пересекают  $EF$  в точках  $T$  и  $N$  соответственно. Мы доказали, что  $M$  — это точка Микеля четырехсторонника  $PKLS$ , а значит, точка  $M$  лежит на описанной окружности треугольника  $PKN$ . Заметим, что  $\angle LXM + \angle MYT = \angle LKM + \angle MNT = \angle NKM = \angle NPK = \angle SPQ$ , а также, что  $\angle LMT = \angle LMX + \angle YMT = \angle LKX + \angle YNT = \angle(YN, KX) = \angle SPQ$ . Итак,  $\angle LXM + \angle MYT = \angle LMT$ , а значит, окружности треугольников  $\triangle_1$  и  $\triangle_2$  касаются в точке  $M$ .

7. Для натуральных чисел  $s < t < n$  докажите, что

$$C_n^s \cdot C_n^t = C_{n+0}^{s+t} \cdot C_s^0 \cdot C_t^0 + C_{n+1}^{s+t} \cdot C_s^1 \cdot C_t^1 + \dots + C_{n+s}^{s+t} \cdot C_s^s \cdot C_t^s.$$

Как обычно, для целых неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  через  $C_a^b$  обозначается количество  $b$ -элементных подмножеств  $a$ -элементного множества. В частности, при  $a < b$  выполнено  $C_a^b = 0$ .

книга I. Tomescu "Problems in Combinatorics and Graph Theory"

**Решение 1.** Будем рассматривать (при разных  $d$ ) способы расположить в  $d$  коробках  $s$  синих и  $t$  красных шариков, не более чем по одному шарiku в коробке. В таком расположении скажем, что пара из синего и красного шарика *выделенная*, если синий лежит справа от красного, а между ними шариков нет. Шарика из выделенных пар также назовём *выделенными*. Ясно, что выделенные пары не пересекаются.

Пусть  $S$  — суммарное количество (по всем  $i$  от 0 до  $s$ ) расположить шарики в строке из  $n + i$  коробок так, чтобы образовалось ровно  $i$  выделенных пар (назовём такие расположения *красивыми*). Докажем, что  $S$  равно обеим частям нашего равенства.

Для доказательства того, что  $S$  равно правой части, заметим, что при фиксированном  $i$  для задания красивого расположения достаточно выбрать  $s + t$  коробок, в которых лежат шарики, а затем задать их раскраску. Пусть синие шарики занумерованы слева направо  $s_1, s_2, \dots, s_s$ , а красные —  $t_1, t_2, \dots, t_t$ . Тогда раскраска однозначно задаётся номерами выделенных красных и синих шариков (тогда сначала лежат синие шарики до первого выделенного невключительно, затем красные до

первого выделенного включительно, затем синие до второго выделенного невключительно, и т. д.). Поэтому общее количество красивых расположений при фиксированном  $i$  равно  $C_{n+i}^{t+s} C_s^i C_t^i$ , откуда и следует требуемое.

Осталось доказать, что  $S$  совпадает с количеством способов разложить по  $n$  коробкам  $s$  синих и  $t$  красных шариков так, чтобы ни в какой коробке не было одноцветных шариков (это количество равно  $C_n^s C_n^t$ ). Для этого в каждом красивом расположении объединим каждую коробку с выделенным синим шариком с предыдущей — получим требуемое расположение по  $n$  коробкам. Наоборот, если у нас есть расположение шариков по  $n$  коробкам, покажем, что по нему однозначно восстанавливается красивое расположение, из которого оно получается. Мысленно представим себе, что в каждой коробке, содержащей шарики обоих цветов, синий лежит справа от красного. Тогда в полученном расположении выделенные пары — это в точности выделенные пары исходного красивого расположения. Чтобы его восстановить, достаточно каждую коробку с синим шариком заменить на две — правую с синим шариком, а другую либо пустую, либо с красным шариком, если он лежал в исходной коробке.

**Решение 2.** Напомним следующую лемму, известную как тождество Вандермонда.

*Лемма.* Для любых целых неотрицательных чисел  $n$ ,  $m$  и  $k$  выполнено

$$C_{n+m}^k = \sum_{r=0}^k C_n^r C_m^{k-r}.$$

Используя лемму, получаем

$$\sum_{k \geq 0} C_s^k C_t^k C_{n+k}^{s+t} = \sum_{k \geq 0} C_s^k C_t^k \sum_{j=0}^k C_k^j C_n^{s+t-j} = \sum_{j \geq 0} C_n^{s+t-j} \sum_{k \geq 0} C_s^k C_t^k C_k^j.$$

Ещё одно применение леммы даёт

$$\sum_{k \geq 0} C_s^k C_t^k C_k^j = \sum_{k \geq 0} C_s^k \frac{t!}{(t-k)! j! (k-j)!} = \sum_{k \geq 0} C_s^k C_t^j C_{t-j}^{t-k} = C_t^j C_{s+t-j}^t.$$

Таким образом, правая часть требуемого тождества принимает вид

$$\sum_{j \geq 0} C_n^{s+t-j} C_t^j C_{s+t-j}^t = \sum_{j \geq 0} \frac{n!}{(n-s-t+j)! (t-j)! (s-j)! j!} = \sum_{j \geq 0} C_n^s C_s^j C_{n-s}^{t-j} = C_n^s \sum_{j \geq 0} C_s^j C_{n-s}^{t-j} = C_n^s C_n^t,$$

снова по лемме.

**8.** Найдите все пары приведённых многочленов  $P(x)$ ,  $Q(x)$  с комплексными коэффициентами такие, что  $P(x)^2 + 1$  делится на  $Q(x)$  и  $Q(x)^2 + 1$  делится на  $P(x)$ . Напомним, что многочлен называется приведённым, если его старший коэффициент равен 1.

ИМС2018

**Ответ:**  $(1, 1)$  и все пары вида  $(P, P+i)$ ,  $(P, P-i)$ , где  $P \in \mathbb{C}[x]$  — непостоянный приведённый многочлен.

**Решение.** Заметим, что если  $Q^2 + 1 \vdots P$  и  $P^2 + 1 \vdots Q$ , то  $P$  и  $Q$  взаимно просты, и условие эквивалентно делимости  $P^2 + Q^2 + 1 \vdots PQ$ .

*Лемма.* Если  $P, Q \in \mathbb{C}[x]$  — приведённые многочлены и  $P^2 + Q^2 + 1$  делится на  $PQ$ , то  $\deg P = \deg Q$ .

*Доказательство.* Предположим противное: существует пара  $(P, Q)$  с  $\deg P \neq \deg Q$ . Среди всех таких пар выберем пару с минимальной суммой  $\deg P + \deg Q$ ; пусть это  $(P, Q)$ . Без ограничения общности считаем, что  $\deg P > \deg Q$ . Пусть  $S$  — многочлен, для которого выполнено  $P^2 + Q^2 + 1 = SPQ$ . Тогда  $P$  является корнем квадратного уравнения  $X^2 - QSX + (Q^2 + 1) = 0$  относительно переменной  $X$ . По формулам Виета второй корень равен  $R = QS - P = \frac{Q^2+1}{P}$ . Так как  $P$  и  $Q$  — приведённые, то и  $R = \frac{Q^2+1}{P}$  также является приведённым многочленом. Следовательно, пара  $(R, Q)$  удовлетворяет условиям леммы. Заметим, что  $\deg R = 2 \deg Q - \deg P < \deg P$ , что противоречит минимальности суммы  $\deg P + \deg Q$ . Противоречие завершает доказательство леммы.

Из леммы следует, что  $\deg(PQ) = \deg(P^2 + Q^2 + 1)$ , а значит,  $\frac{P^2+Q^2+1}{PQ}$  — постоянный многочлен. Если  $P$  и  $Q$  постоянные, имеем  $P = Q = 1$ .

Пусть теперь  $\deg P = \deg Q \geq 1$ . Так как  $P$  и  $Q$  приведённые, старший коэффициент  $P^2 + Q^2 + 1$  равен 2, а у  $PQ - 1$ , откуда  $\frac{P^2 + Q^2 + 1}{PQ} = 2$ . Следовательно,  $P^2 + Q^2 + 1 = 2PQ$ , и потому  $(P - Q)^2 = -1$ . То есть  $Q = P + i$  или  $Q = P - i$ .

Нетрудно проверить, что эти пары действительно являются решениями задачи.